OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA JUDEȚEANĂ – 12.03.2011
BAREM DE CORECTARE
Clasa a V-a

SUBIECTUL 1

Fie $P = \overline{abc} + \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}$, P = pătrat perfect, unde a, b, c sunt cifre distincte din baza 10.

a) Arătați că $a + b + c \in M_3$;
b) Arătați că $a + c - b \neq 2$;
c) Determinați cea mai mare valoare a lui P.

Prof. Mazilu Marin, Rm. Vâlcea

Soluție și barem

a) $P = 111a + 21b + 12c = 3(37a + 7b + 4c)$ (1) 1p
P = pătrat perfect și $3 \mid N$ atunci $3^2 \mid N$ (2) 1p
Din (1) și (2) $\Rightarrow 3 \mid 37a + 7b + 4c$,
Dar $3 \mid 36a + 6b + 3c$ și avem imediat $3 \mid a + b + c \Rightarrow a + b + c \in M_3$ 1p

b) $P = 111a + 21b + 12c = 110a + 22b + 11c + a + c - b =$
$11(10a + 2b + c) + a + c - b$ 1p
Dacă $a + c - b = 2$ atunci $P = 11k + 2 \neq$ pătrat perfect 1p

c) Cea mai mare valoare a lui P încercăm să o găsim pentru a = 9 și obținem:
$P = 999 + 21b + 12c$; *Deci* $P > 999 > 31^2$ *și* $P < 1296 = 999 + 21\cdot9+12\cdot9 = 36^2$ 1p
Avem imediat $P \in \{32^2, 33^2, 34^4, 35^2\}$ și (folosind eventual punctual a)
găsim b = 2 și c = 4, deci $P = 33^2 = 1089$ 1p

SUBIECTUL 2

Suma cifrelor numărului natural ***n***, scris în baza 10, este egală cu 2011.

a) Dacă în scrierea lui ***n*** se folosesc 224 de cifre, aflați numărul maxim de cifre de 8 folosite;

b) Arătați că în scrierea numărului ***n*** există o cifră folosită de cel puțin 23 de ori;

Prelucrare G.M. nr.12 / 2009

<u>Soluție și barem</u>

a) $2011 = 223\cdot 9 + 4 \Rightarrow$ în scrierea lui n se folosesc cel puțin 224 de cifre …………1p
$2011 = 219\cdot 9 + 5\cdot 8 \Rightarrow$ cifra 8 poate fi folosită de 5 ori ………………….………..1p
Dacă sunt 6 cifre de 8 $\Rightarrow$ suma maximă a cifrelor numărului ***n*** este
$218\cdot 9 + 6\cdot 8 = 2010 < 2011$…..……………………………………………………..1p
Finalizare ……………………...………………………………………………..1p

b) Numărul minim de cifre folosite în scrierea lui ***n*** este 224 și avem 10 cifre la dispoziție(de la 0 la 9) ……………………………………………………………1p
Dacă fiecare cifră ar fi folosită de maxim 22 ori ar rezulta 220 de cifre și cum avem 224 de cifre rezultă cerința ……………………………………………….. 2p

SUBIECTUL 3

Aflați numerele naturale nenule a și b știind că:

$$\mathbf{a + b + a : b = a \cdot b}$$

Prof. Aurel Ene, Rm. Vâlcea

<u>Soluție și barem</u>

$a = b[a \cdot b - (a + b)] \Rightarrow a \in M_b \Rightarrow a = k\cdot b,\ k \in N^*$ ………………………………………….… 2p

Ecuatia se rescrie $k = k\cdot b^2 - b(k + 1) \Rightarrow k(b^2 - b - 1) = b \Rightarrow k \in D_b \Rightarrow b = k\cdot m,\ m \in N^*$ …. 1p

$k(k^2\cdot m^2 - k\cdot m - 1) = k\cdot m \Rightarrow k^2\cdot m^2 - k\cdot m - 1 = m \Rightarrow m(k^2\cdot m - k - 1) = 1 \Rightarrow m|\ 1 \Rightarrow m = 1$ …2p

$\Rightarrow b = k \Rightarrow a = b^2 \Rightarrow b^2 + b + b = b^3 \Rightarrow (b \neq 0)\ b + 2 = b^2 \Rightarrow b(b - 1) = 2$ …………………...1p

Avem imediat b = 2 și a = 4 ……………………..……………………………………………1p

SUBIECTUL 4

Se consideră mulţimea M = $\{3^a \cdot 4^b \cdot 5^c \mid a, b, c$ sunt cifre nenule din baza $10\}$

a) **Arătați că nu există două submulțimi disjuncte A și B ale lui M astfel încât A ∪ B = M și produsul elementelor din mulțimea A să fie egal cu produsul elementelor din mulțimea B.**

b) **Arătați că orice submulțime de cinci elemente a lui M conține cel puțin două elemente distincte al căror produs este pătrat perfect.**

<u>**Soluție și barem**</u>

a) Cifra *a*(exponentul lui 3) poate lua fiecare din cele 9 valori(de la 1 la 9) de câte 81 de ori și analog pentru cifrele b și c 1p
Produsul tuturor elementelor din M este $3^{3645} \cdot 4^{3645} \cdot 5^{3645}$ 1p
Cum 3 este număr prim și exponentul lui 3 este număr impar avem imediat că nu se poate scrie 3^{3645} ca produs de două numere egale ……………………………...……1p

b) Fie $3^a \cdot 4^b \cdot 5^c$ și $3^m \cdot 4^n \cdot 5^p$ – două elemente oarecare din M
$4^b \cdot 4^n = (2^{b+n})^2$ este pătrat perfect pentru orice b și n cifre nenule ……………………1p
Produsul celor două elemente din M este de forma $3^{a+m} \cdot 4^{b+n} \cdot 5^{c+p}$ care este pătrat perfect dacă exponenții lui 3 și 5 sunt numere pare …………………………………1p
Avem 4 posibilități pentru exponenții lui 3 și 5 ca elemente din M: $3^{impar} \cdot 5^{impar}$, $3^{impar} \cdot 5^{par}$, $3^{par} \cdot 5^{impar}$ sau $3^{par} \cdot 5^{par}$ …………………………………………………...1p
Conform principiului lui Dirichlet dacă avem 5 elemente din M atunci cel puțin două sunt de aceeași formă, iar acestea prin înmulțire dau exponenți numere pare ⇒ pătrat perfect ……………………………………………………………………….…..1p